

Sulla probabilità

Roma, dicembre 2002

A cura di Paolo Agnoli

Premessa

Questo breve scritto è stato redatto come tesina per l'esame di *Psicologia Generale* (prof. Vetrone) presso l'Università di Roma 2 Tor Vergata nell'anno accademico 2002-2003.

1. Introduzione

Our assent ought to be regulated by the grounds of probability
John Locke

Come sappiamo il nostro cervello elabora informazioni in condizioni di incertezza: i dati che provengono dagli organi di senso forniscono infatti informazioni su una realtà incompleta, variabile ed incerta e *gli oggetti di questa realtà sono percepiti in maniera dinamica, mutevole e parziale. L'incertezza relativa al risultato di una operazione di misura è l'esempio più evidente di questa situazione.* Esiste un importante capitolo della matematica moderna che si occupa di dati e variabili aleatori: la matematica dell'incertezza. *Questo ramo della matematica è costituito principalmente dalla teoria del calcolo probabilistico.*

La conoscenza di alcuni elementari metodi statistici per l'elaborazione degli errori di misura e per l'analisi delle osservazioni sperimentali è indispensabile agli scienziati ed a chi si interessa di misure tecniche. I concetti fondamentali di probabilità, di distribuzione e propagazione degli errori sono parte importante della conoscenza di chiunque si trovi a trattare dei numeri connessi a delle misure sperimentali.

Il problema è trovare un numero che esprima il risultato della misura e un numero che ne esprima l'errore, in modo che sia consentito fare previsioni circa il risultato di ulteriori misure. Il calcolo delle probabilità permette appunto di fare previsioni su una base matematica. Ciò non significa ovviamente che le osservazioni fatte in seguito debbano corrispondere rigorosamente alle nostre previsioni; significa semplicemente che si possono fare le migliori previsioni consistenti con i dati a disposizione. Il linguaggio del calcolo delle probabilità permette di esprimersi quantitativamente circa un fenomeno che può essere grandemente variabile.

In questo breve scritto mi occuperò di discutere, in maniera critica, il concetto stesso di probabilità.

2. Due prime definizioni

Esistono principalmente due definizioni convenzionali accettate del concetto di probabilità. La prima è la cosiddetta *definizione classica* di probabilità e la si può enunciare nel modo seguente:

la probabilità, $P(A)$, di un evento A è il rapporto tra il numero N di casi "favorevoli" (cioè il manifestarsi di A) e il numero totale M di risultati ugualmente possibili e mutuamente escludentesi:

$$P(A) = \frac{N}{M}$$

Questa probabilità è talvolta detta probabilità *oggettiva* o anche probabilità *a priori*.

La seconda definizione è quella *frequentista* ed è la definizione sperimentale di probabilità come *limite della frequenza* misurabile in una serie di esperimenti. Essa ricalca lo schema della definizione classica, introducendo però un'importante variazione: sostituisce al rapporto numero casi favorevoli / numero di casi possibili il rapporto numero di esperimenti effettuati con esito favorevole / numero complessivo di esperimenti effettuati nelle stesse condizioni. Vediamo allora come viene definita questa probabilità:

la probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero di prove.

In pratica, se abbiamo un esperimento ripetuto m volte ed un certo risultato A che accade n volte, la probabilità di A è data dal limite della *frequenza* (n/m) quando m tende all'infinito

$$P(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n}{m}$$

Gli m tentativi possono essere effettuati sia ripetendo in sequenza m volte lo stesso esperimento sia misurando simultaneamente m esperimenti identici. Se lanciamo una moneta in aria, sappiamo intuitivamente che la probabilità che venga testa è il 50%. Se gettiamo un ordinario dado, sappiamo ancora che la probabilità che esca 5 è $1/6$.

Che cosa significa questo in realtà? Ad ogni lancio della moneta esce o testa o croce (non è concepibile l'eventualità che in un lancio esca per metà testa e per metà croce). Ciò che voglio dire, in effetti, è che, se lanciamo la moneta un numero molto grande di volte, il numero di volte che uscirà testa sarà all'incirca uguale alla metà del numero totale dei lanci. E se gettiamo un dado un gran numero di volte, il 5 uscirà più o meno un sesto delle prove.

Si dovrebbe ben precisare che nel problema del lancio della moneta abbiamo stabilito soltanto che il rapporto fra il numero delle volte in cui esce testa e il numero complessivo dei tentativi si avvicina al valore di un mezzo, appena il numero dei tentativi *diventa elevato*.

Se sappiamo calcolare le probabilità per alcuni semplici eventi, come il lancio di una moneta o di un dado, possiamo calcolare probabilità per eventi più complicati, che risultino composti da questi semplici eventi: si noti che queste probabilità sono sempre numeri minori di 1. Se sommiamo le probabilità di tutti gli eventi che possono avvenire, otteniamo la probabilità che si verifichi una qualsiasi delle cose che possono avvenire, probabilità che naturalmente è uguale ad uno.

3. Il gioco delle tre scatole

Il concetto di probabilità è certamente uno dei più problematici nella storia della scienza. Voglio far notare che anche la più utilizzata e famosa delle definizioni, quella frequentista, è tutt'altro che semplice ed ovvia da concepire. Moltissime persone, anche di spiccata intelligenza, che sono convinte di averla compresa (con tutte le aporie che ciò comporta, vedi prossimo paragrafo), di fronte ad un primo problema pratico hanno difficoltà ad applicarla. Non mi riferisco alla eventuale complessità di calcolo di eventi composti, ma al concetto stesso appena introdotto. Per spiegarmi meglio descrivo brevemente il test che va sotto il nome di "gioco delle tre scatole".

Ci sono tre scatole sul tavolo ed io (diciamo) che conduco il gioco ho messo *precedentemente* un premio in una delle tre. Il vostro compito è quello di trovare il premio, ed il gioco avviene in due passi successivi. Vi chiedo di fare una prima scelta. Una volta che avete effettuato la vostra scelta su una delle tre scatole(che rimane chiusa), vi dico che in una tra le due rimanenti scatole sicuramente non c'è il premio, e la tolgo dal tavolo. A questo punto vi do la possibilità di conservare la vostra prima scelta o di spostarla sulla seconda scatola rimasta.

Il problema è il seguente: vi converrà mantenere la prima scelta o vi converrà cambiare?

La maggioranza delle persone (provare per credere) è convinta che non c'è nessun vantaggio nel

cambiare ora la scelta precedentemente effettuata e, di norma, mantiene la scelta iniziale. La risposta giusta è che invece bisogna cambiare: nella scatola rimasta, sulla quale vi do la possibilità di cambiare, vi è una probabilità di $2/3$ di trovare il premio, e non $1/2$ come erroneamente molti ritengono. L'errore che si compie è quello di ritenere che, essendo la scelta che vi si propone quella tra due sole possibilità, entrambe debbano avere necessariamente la stessa probabilità.

Presento una delle possibili spiegazioni.

Se per caso la vostra prima scelta è quella giusta, dopo che io avrò aperto la scatola il cambio sarà *certamente* (non solo probabilmente) penalizzante. Al contrario, se la prima scelta è caduta sulla scatola vuota, sarete *certamente* (non solo probabilmente) avvantaggiati dal cambio. Quanto spesso vi capiterà di scegliere la scatola giusta (ed essere così *necessariamente penalizzati* dal cambio)? *Una* volta su tre. Quante volte vi capiterà di scegliere una scatola vuota (essendo così necessariamente favoriti dal cambio)? *Due* volte su tre.

Sono sicuro che molti di voi rimarranno perplessi. Comunque per una trattazione completa del gioco potete vedere Piattelli Palmarini, 1995.

4. Considerazioni critiche.

Prima di introdurre un nuovo concetto di probabilità, riflettiamo sul fatto che le "definizioni" standard non possono *da un punto di vista teorico* definire il concetto di probabilità in quanto esse *assumono il concetto di probabilità*. Prese alla lettera, esse sono infatti definizioni circolari:

- (*definizione classica*)

$$p \approx \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili (se ugualmente probabili)}}$$

- (*definizione frequentista*)

$$p \approx \frac{\text{numero delle prove favorevoli}}{\text{numero totale delle prove}}$$

quando sono state effettuate un grande numero di prove nelle stesse condizioni (equiprobabilità).

Le definizioni mostrano una evidente circolarità nella definizione *in quanto utilizzano il concetto di equiprobabilità per definire la probabilità*. La definizione frequentista inoltre è applicabile solamente quando sia possibile ripetere numerose volte l'esperimento, ma non è affatto chiaro che cosa debba intendersi per *numerose*.

Una critica famosa alla nozione di equiprobabilità così come utilizzata per esempio nella definizione classica è quella di De Finetti:

Tale giudizio di equiprobabilità [...] rispecchia una situazione di simmetria che viene spesso precisata obiettivamente dicendo che le palline debbono essere uguali, la moneta e il dado perfetti simmetrici fisicamente) ecc.; il criterio rimane tuttavia fondamentalemente soggettivo perché la scelta più o meno vaga di requisiti più o meno oggettivi da includere o no in tale concetto di "uguaglianza" non può che riflettere la distinzione soggettiva di ciascuno tra le circostanze che influiscono o non influiscono sulla sua opinione. (De Finetti, 1970, 235)

Questa critica è alla base dell'atteggiamento dei cosiddetti "soggettivisti" (vedi oltre) come qui riassunto.

La valutazione di equiprobabilità di due individui riflette quindi, secondo gli autori in esame, la distinzione puramente soggettiva delle circostanze che influiscono o non influiscono sugli eventi considerati. Pertanto se due individui pervengono alla medesima valutazione ciò dipenderebbe da ragioni psicologiche la cui validità è più o meno fortuita e che comunque non possono in alcun modo imporsi a livello razionale. Il fatto è che, sempre secondo gli anzidetti autori, non esisterebbe alcuna ragione, né logica né metafisica, in grado di costringere due individui a considerare allo stesso modo le circostanze e quindi ad arrivare alla medesima valutazione di equiprobabilità. (Costantini, Geymonat, 1982, 65)

Oltre queste considerazioni di carattere generale, voglio subito sottolineare che, dal punto di vista storico, le due "definizioni" di probabilità appena incontrate, hanno indotto molti

a confondere il concetto di probabilità con il suo metodo di valutazione, come si può verificare in vari libri di testo e voci di enciclopedia;
ritenere che il valore di probabilità sia oggettivo, cioè che sia insito nella natura delle cose e non dipenda da chi lo valuta;
credere che si possa parlare di probabilità solo in due casi, molto particolari e riduttivi, rispetto alla complessità del mondo reale. Sarebbero quindi esclusi da argomentazioni probabilistiche tutti quegli eventi (la stragrande maggioranza di quelli di interesse pratico e scientifico) per i quali è impossibile eseguire l'inventario dei casi possibili e di quelli favorevoli o per i quali non è possibile ripetere "infinite volte" l'esperimento nelle identiche condizioni. (D'Agostini, Ottobre 2001, 23)

Che succede, in altre parole, se tutti i risultati possibili non sono ugualmente probabili? Con alcuni dadi progettati per certi scopi, alcuni risultati sono più probabili di altri: è più probabile, infatti, che un dado truccato cada su di un lato con maggiore frequenza rispetto agli altri.

Supponiamo che, in una coppia di dadi, uno sia truccato - bilanciato, cioè, in modo che un numero esca con maggiore frequenza degli altri. In questo caso le regole di calcolo più semplici non possono essere utilizzate per accertare le probabilità. Immaginiamo, ad esempio, di sapere che un dado è stato truccato in modo che il "sei" esca con maggiore probabilità rispetto agli altri numeri. In tale situazione, se tutti e due i dadi vengono lanciati, sappiamo che un doppio sei uscirà probabilmente con maggiore frequenza di 1 su 36, che, invece, è la probabilità corretta con cui dovrebbe uscire lanciando due dadi ben equilibrati. Ma di quanto è più probabile?

One way that we can find out is by tossing the dice repeatedly, counting the number of times we get double sixes, and expressing that count as a proportion of the number of tosses. This is called the *long-range relative frequency* definition of probability. It is clear that when the dice are not loaded, the probability of double sixes we get by the method of counting sides will be duplicated by a long-range relative frequency, also equal to 1/36 (assuming that the dice are cast a very large number of times). The long-range relative frequency definition of probability relates the important construct of mathematical probability to something that can be observed empirically, and thereby marries it to empirical science.

For all its advantages, the long-range relative frequency definition of probability made the term (and the laws for manipulating probabilities) applicable only to situations that could, conceptually at least, be repeated many times. But there are many other sorts of situations, ones that are unique in that they cannot, even conceptually, be repeated many times, to which we often want to apply the notion of probability. For example, we may be interested in the probability that this scientific theory predicts future observations well[...]the probability that it will rain during the next hour, or the probability that our candidate will win in the upcoming election. These events will occur only once. It became clear that the definition of probability needed to be expanded to one that that would cover all such situations and would include the earlier definitions as special cases. (Press, Tanur, 2001, 201-202)

5. Il concetto di probabilità soggettiva.

Vediamo di introdurre ora una nuova definizione, assumendo in sostanza che

[...]il concetto di probabilità sia primitivo, ovvero vicino a quello del senso comune. Per dirlo in un modo scherzoso, il concetto di probabilità è quello che si ha "prima di andare a scuola" e che si seguita ad usare inconsciamente dopo, "nonostante quello che si è appreso";(D'Agostini, Gennaio 1999, 28)

Una definizione che vada oltre il concetto intuitivo e che non sia limitata ai casi *limite* degli eventi equiprobabili o delle prove effettuate in condizioni di equiprobabilità può far ricorso al concetto di scommessa, percepibile a livello intuitivo da tutte le persone razionali.

Una formulazione accettata, detta appunto *probabilità soggettiva*, è per esempio la seguente:

la probabilità di un evento A è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di A.

Il campo di applicabilità di questa definizione è molto vasto; occorre aggiungere che la "coerenza" significa *la corretta applicazione delle norme di calcolo*. Vediamo meglio che cosa si intende con ciò. Il concetto di probabilità soggettiva potrebbe suggerire che ognuno possa assegnare una probabilità qualsiasi a un evento. Non è così. Infatti si introduce la seguente "regola": il soggetto è tenuto ad accettare tutte le scommesse che si riferiscono agli eventi stessi, alle loro negazioni e alle loro composizioni (una scommessa su, cioè, più di un evento); le probabilità associate agli eventi non devono essere modificate di volta in volta se le informazioni in possesso non mutano. Questa "regola" viene detta *assioma di coerenza* e serve a far sì che una persona non cambi la propria probabilità soggettiva per tornaconto personale. In altre parole possiamo dire che una volta fissate le quote di scommessa pro e contro l'evento (proporzionali alla probabilità dell'evento e del suo opposto), *deve essere indifferente allo scommettitore il verso della scommessa*: se c'è una netta propensione pro, vuol dire che bisogna alzare la quota in favore dell'evento; nel caso opposto bisogna alzare l'altra quota. Il rapporto delle quote, in condizione di indifferenza sul verso da scegliere, è una valutazione del rapporto delle probabilità. Quindi il valore della probabilità è dato dalla quota di scommessa sull'evento divisa per il totale delle quote. Per un approfondimento del concetto di probabilità soggettiva e del concetto di coerenza vedi Scozzafava, 2001, Ross, 2000, De Finetti, 1989 e 1995.

Soggettiva sta ad indicare che la valutazione di probabilità dipende dallo stato di informazione del soggetto che la esegue, e, anche se basata su una credenza specifica, *non è affatto arbitraria*: il ruolo normativo della scommessa coerente obbliga a tener conto di tutte le informazioni a disposizione.

The term *subjective* used here implies that this construct is based on a belief specific to an individual. The other definitions of probability given above are special cases of subjective probability. The belief could be that the mathematical probability (an enumerative proportion) is what is called for in a given instance. Or it might be that the long-range relative frequency (the proportion of times some event occurs within many trials) is what is called for in the belief system of the person making the probability statement. Or it could be that neither definition is appropriate, and the subjective probability statement instead implies a belief of the individual based on his or her scientific knowledge and deep understanding of some underlying biological, physical, or social phenomenon. (Press, Tanur, 2001, 202)

Ed inoltre è importante notare che

La conoscenza che altri valutano diversamente la probabilità dello stesso evento è una informazione che andrebbe utilizzata. Ma non tanto per mediare le due stime quanto piuttosto per capire meglio il problema e comportarsi alla fine nel modo più coerente possibile come se veramente si dovesse scommettere del denaro su o contro quell'evento. La così detta "oggettività", come è percepita da chi è al di fuori della ricerca scientifica, viene recuperata quando una comunità di esseri razionali condivide lo stesso stato di informazione. Ma anche in questo caso, si dovrebbe parlare più propriamente di "*intersoggettività*".(D'Agostini, Ottobre 2001, 31)

Si noti inoltre che questa definizione *non è affatto in contrasto con le due precedenti*, nel senso che le due "pseudo-definizioni" sono prontamente recuperate come regole di *valutazione* della probabilità, qualora colui che effettua la valutazione ritenga che le clausole presupposte dalle definizioni convenzionali siano soddisfatte.

Il concetto di probabilità soggettiva dipende quindi dallo stato di informazione del soggetto che effettua la valutazione. Questa formulazione è anche riconosciuta dalla guida ISO (International Organization for Standardization) sulla rappresentazione delle incertezze di misura:

In contrast to this frequency-based point of view of probability an equally valid viewpoint is that probability is a measure of the *degree of belief* that an event will occur.(ISO, 1993, 35)

E in effetti la principale differenza tra questo concetto di probabilità ed una presunta definizione oggettiva è che essa non è una caratteristica intrinseca di un evento, ma dipende dallo stato di informazione disponibile a chi esegue la valutazione. In una affermazione provocatoria De Finetti (De Finetti, 1970) afferma: *La probabilità non esiste*.

The objectivist formulation of probability presumes the existence of a "real" world", which is beyond the pale of our ability to experience it and to measure it directly[...]The subjectivist formulation of probability and statistics is based upon a radical break with this conception of empirical science as yielding approximate results about a real world beyond our experience. We presume that scientific investigation constitute our studies about the world of human experience, not some supposed world outside of experience. Empirical measurements are merely the recording of human activity in the world, conducted according to operationally described procedures.(Lad, 1996, 11)

Il punto di forza di questa interpretazione della probabilità è, oltre al recupero del concetto intuitivo, la possibilità di fare affermazioni probabilistiche su qualsiasi evento, indipendentemente dal fatto di avere un problema perfettamente simmetrico ("casi possibili e casi favorevoli") o di poter ripetere l'esperimento un grande numero di volte ("limite della frequenza").

We could make an analogous argument about any quantity unknown to you, such as the height of the next person you might see accidentally in the street or whether a particular scientific theory is true. Your personal belief about the height of the person in the street would most certainly not be that the height is greater than 10 feet, or as small as 5 inches; you know in advance that people are not that tall or small. So you could say that your subjective or personal probability that the height of the person is less than 5 inches or greater than 10 feet is zero. But your subjective probability might be that there's a 50% chance that the person's height is within an inch or so of 5 feet 8 inches, that there's a 25% chance that the person's height is less than 5 feet 4 inches, and a 15 % chance that the person's height will exceed 6 feet. These subjective probabilities are based on your own previous observations, experiences, and understandings about human growth and development. Indeed, if you thought that the next person you will see is, in some sense, randomly chosen from the population, you might use all the published information about the distribution of heights in the population to form your personal probability.(Press, Tanur, 2001, 203)

Questa interpretazione, va notato, negli ultimi anni si sta lentamente imponendo in molti ambienti in base alla sua pragmaticità (si ispira a metodi che pongono l'accento sulla decisione piuttosto che sulle argomentazioni in base alle quali la decisione stessa è presa) e differenti ragioni.

Una di queste fu l'uso sempre più ampio di nozioni probabilistiche nella gestione delle aziende industriali e la conseguente posizione privilegiata che, almeno nei paesi occidentali, segnatamente in quelli di lingua inglese, vi assumono le decisioni personali. Va ricordato infatti che nonostante i "padri" europei, il moderno soggettivismo prese vigore e si irradiò in modo quasi travolgente dalla nazione guida del mondo capitalistico occidentale. L'altra fu il richiudersi delle concezioni oggettivistiche - e ciò vale in particolar modo per il frequentismo, la concezione più seguita da fisici e statistici - in un dogmatismo sempre più sordo ai progressi scientifici, in particolare ai sempre nuovi usi delle nozioni probabilistiche.(Costantini, Geymonat, 1982, 62)

6. Conclusioni

Il concetto di probabilità soggettiva è basato sull'idea che la probabilità è legata allo stato di incertezza e non soltanto al risultato di esperimenti ripetuti.

Questo punto di vista, che corrisponde al significato originale di "probabile", è quello che in effetti sostenevano (vedi per esempio Hacking, 1975 and Stigler, 2000) scienziati e filosofi come Bernoulli, Hume, Laplace e Gauss, prima di essere abbandonato in periodo neopositivista.

Si può notare che anche prima, nel 1662, la *Logica* di Port Royal, scritta da Antoine Arnauld ed altri, finisce con una discussione sulle *credenze ragionevoli* e la credibilità (o grado di fiducia).

Inoltre, è interessante sottolineare che nel punto di vista di Hume sul concetto della probabilità il concetto stesso e le valutazioni sono chiaramente separati.

Though there be no such thing as Chance in the world; our ignorance of the real cause of any event has the same influence on the understanding, and begets a like species of belief or opinion. There is certainly a probability, which arises from a superiority of chances on any side; and according as this superiority increases, and surpasses the opposite chances, the probability receives a proportionable increase, and begets still a higher degree of belief or assent to that side, in which we discover the superiority. If a die were marked with one figure or number of spots on four sides, and with another figure or number of spots on the two remaining sides, it would be more probable, that the former would turn up than the latter; though, if it had a thousand sides marked in the same manner, and only one side different the probability would be much higher, and our belief or expectation of the event more steady and secure. This process of the thought or reasoning may seem trivial and obvious; but to those who consider it more narrowly, it may, perhaps, afford matter for curious speculation. (Hume, 1957, 78; see also <http://www.utm.edu/research/hume/wri/1enq/1enq-6.htm>)

La "dualità" della probabilità è stata di fatto riconosciuta da molto tempo.

Carnap said we ought to distinguish a 'probability₁' from a 'probability₂'; later he spoke of inductive and statistical probabilities. Poisson and Cournot said we should use the ready-made French words *chance* and *probabilité* to mark the same distinction. Before that Condorcet suggested *facilité* for the aleatory concept and *motif de croire* for the epistemic one [...] Bertrand Russell uses 'credibility' for the latter [...]. There have been many other words. We have had *Zuverlässigkeit*, 'propensity', 'proclivity', as well as a host of adjectival modifiers of the word 'probability', all used to indicate different kinds of probability. (Hacking, 1975, 13)

Concludendo voglio sottolineare che i diversi approcci, pur perseguendo degli scopi prettamente scientifici, si sono anche impegnati *nel problema filosofico di delineare una concezione generale di probabilità*. L'indirizzo classico e quello frequentista hanno sostenuto che la probabilità possiede una natura oggettiva; al contrario, l'indirizzo soggettivista ha sostenuto che la probabilità possiede una natura esclusivamente soggettiva.

Queste seppur brevi considerazioni giustificano quindi davvero l'affermazione che *il problema della natura della probabilità, e la relativa scelta tra oggettivismo e soggettivismo, sono genuinamente filosofici*.

BIBLIOGRAFIA

Costantini D., Geymonat L., *Filosofia della probabilità*, Milano, Feltrinelli, 1982

D'Agostini G., *Errori e incertezze di misura – rassegna critica e proposte per l'insegnamento* -, Roma, Università La Sapienza Dipartimento di Fisica, gennaio 1999

- D'Agostini G., *Probabilità e Incertezza di misura (parte I)*, Roma, Università La Sapienza Dipartimento di Fisica, ottobre 2001
- De Finetti B., *Filosofia della probabilità*, Milano, Il Saggiatore, 1995
- De Finetti B., *La logica dell'incerto*, Milano, Il Saggiatore, 1989
- De Finetti B., *Teoria delle probabilità*, Milano, Il Saggiatore, 1970
- Hacking I., *The Emergence of Probability*, Cambridge, Cambridge University Press, 1975
- Hume D., *Ricerche sull'intelletto umano e sui principi della morale*, a cura di Dal Pra M., Bari, 1957
- International Organization for Standardization, *Guide to the expression of uncertainty in measurement*, Genève, 1993
- Lad F., *Operational Subjective Statistical Methods. A Mathematical, Philosophical, and Historical Introduction*, New York, John Wiley & Son INC., 1996
- Piattelli Palmarini M., *L'illusione di sapere – che cosa si nasconde dietro i nostri errori*, Milano, Mondadori, 1995
- Press S. J., Tanur J.M., *The Subjectivity of Scientists and the Bayesian Approach*, New York, John Wiley & Sons, INC, 2001
- Ross S., *Introduction to Probability Models*, London, Academic Press, 2000
- Scozzafava R., *Incetezza e Probabilità*, Bologna, Zanichelli, 2001
- Stigler S. M., *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*, Cambridge, The Belknap Press of Harvard University, 2000