Presentazione di una nuova teoria sulla valutazione del rischio, ovvero traduzione, con breve introduzione, del saggio (1738) *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis* di Daniel Bernoulli

7 febbraio 2008

Paolo Agnoli, Francesco Piccolo (Elecom s.c.s.i)
paolo.agnoli@fastwebnet.it, f.piccolo@isac.cnr.it

1 Premessa

Come noto nella teoria delle decisioni il *valore atteso* di una particolare scelta non può essere sempre preso come criterio per determinare la decisione ottimale dal punto di vista razionale. Daniel Bernoulli in una fortunata memoria scritta nel 1731 e contenuta nel volume dei *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* pubblicato nel 1738, per primo suggerì di utilizzare in luogo del valore atteso un *valore morale* o *utilità attesa* che una persona è disposta a spendere e che *dipende dal patrimonio che possiede*. La proposta di Bernoulli ha avuto grandi influenza ed eco, fino ai nostri giorni, in davvero molte discipline e diversi settori di ricerca. In particolare la prospettiva aperta dal saggio è alla base del cosiddetto approccio *utilitarista*, sia in filosofia che in politica ed economia, per il quale ogni decisione individuale dovrebbe essere ispirata dalla necessità di massimizzare la propria utilità attesa e l'insieme delle decisioni individuali dovrebbe andare nella direzione della massimizzazione del benessere collettivo. Senza inoltrarci qui in una discussione di questi od altri importanti aspetti, riassumiamo prima brevemente l'idea di Bernoulli ed il contesto in cui fu concepita e presentiamo poi la traduzione integrale del suo articolo dall'originale latino.

2 Introduzione

> *Dovremmo temere o sperare che un evento si realizzi non solo in proporzione al vantaggio o svantaggio che esso ci procura, ma anche tenendo conto della probabilità che si realizzi.*
> Antoine Arnauld

In condizioni di rischio o incertezza, consideriamo le diverse possibilità, $i = 1, 2, ..., n$, che a priori potrebbero verificarsi a seguito di una particolare scelta e assegniamo a queste le probabilità p_i. Introduciamo inoltre una quantità M_i, che rappresenta il "profitto" (nel caso di una scommessa in denaro M_i è la vincita monetaria[1]) , che otterremmo se l'iesima possibilità dovesse in realtà verificarsi. Allora possiamo definire il *valore atteso*[2]di una certa decisione come $VA = \sum_i p_i M_i$. Sembrerebbe ovvio che una persona che agisca nel suo interesse debba sempre comportarsi in maniera tale di *massimizzare il suo valore atteso*[3], *e ciò in effetti può bastare, in taluni casi, per effettuare una scelta razionale* (anche se, allo stato dei fatti malgrado il comportamento umano sia solitamente diretto a scopi, non sempre è coerente riguardo ai propri scopi, e alle priorità che assegna ai propri vari scopi, da avvicinarsi a un ideale di razionalità). Chiariamo subito quanto detto con un breve esempio.

Sono un rivenditore di giornali. Ho la possibilità di acquistare ogni giorno un certo numero di copie, diciamo, di un quotidiano. Ogni copia mi costa 0.50 *mentre il prezzo di vendita è* 1. *Devo decidere quante copie acquistare. Ipotizzo per semplicità che le decisioni possibili siano quelle di acquistare* 1000, 2000, 3000 *o* 4000 *copie, ossia:* $D_1 = 1000$, $D_2 = 2000$, $D_3 = 3000$, $D_4 = 4000$. *Le decisioni elencate saranno buone o cattive a seconda della domanda da parte del pubblico, situazione che rappresenta il cosiddetto "stato di natura". Sempre per la massima semplicità, ipotizzo che possa essere:* $S_1 = 1000$ *copie,* $S_2 = 2000$ *copie,* $S_3 = 3000$ *copie,* $S_4 = 4000$ *copie Faccio un'ulteriore ipotesi (basata sulla mia conoscenza ed esperienza pregresse) sulla domanda da parte del pubblico e precisamente che le probabilità di* $S_1 - S_4$ *siano rispettivamente:* $p_1 = 0.2, p_2 = 0.5, p_3 = 0.2, p_4 = 0.1$

Tutti i possibili guadagni in euro, in base allo stato di natura che si verificherà ed alla mia decisione, sono descritti in tabella, dove compare anche il valore atteso (sempre in euro) di ogni decisione:

Infatti il valore atteso delle 4 decisioni risulta essere:

per D_1 *è* $500 * (0.2) + 500 * (0.5) + 500 * (0.2) + 500 * (0.1) = 500$;

per D_2 *é* $0 * (0.2) + 1000 * (0.8) = 800$

per D_3 *é* $-500 * (0.2) + 500 * (0.5) + 1500 * (0, 3) = 600$

---

[1] In generale M_i è la quantificazione del valore di un esito; per esempio in medicina può rappresentare lo stato di salute, la vita attesa, ecc...

[2] Questa grandezza è anche chiamata *speranza matematica* o *previsione di vincita*, essendo niente altro che la somma delle possibili "vincite" ognuna pesata con la sua probabilità di accadere

[3] In altre parole, per esempio, dovrebbe essere sempre conveniente scommettere ad un gioco che ha un valore atteso positivo: le scelte in questo caso sono non giocare (scelta che ha chiaramente valore atteso nullo) o giocare

	S_1	S_1	S_1	S_1	Valore Atteso (€)
D_1	500	500	500	500	500
D_2	0	1000	1000	1000	800
D_3	-500	500	1500	1500	600
D_4	-1000	-500	1500	2000	50

per D_4 *é* $-1000 * (0.2) - 500 * (0.5) + 1500 * (0.2) + 2000 * (0.1) = 50$

Con il criterio del valore atteso scelgo quindi la decisione che mi dà il valore atteso massimo, ovvero D_2.

Questo non è certo un risultato recente. Per esempio, nel celebre argomento della scommessa sull'esistenza di Dio, Blaise Pascal proponeva[4] di scegliere l'azione che, diremmo noi oggi, massimizza proprio il valore atteso[5] : quand'anche la nostra probabilità soggettiva che Dio esista fosse piccola a piacere, ma superiore a zero, il valore del premio, la vita eterna, sarebbe infinito e una frazione positiva di una quantità infinita è ancora infinita. Avremmo, perciò, una decisione con una valore atteso infinito contro una con un valore finito[6] .

> Qui c'è effettivamente un'infinità di vita infinitamente beata da guadagnare, una probabilità di vincita (hasard de gain) contro un numero finito di probabilità (hasards) di perdita, e quel che rischiate è qualcosa di finito. Questo tronca ogni incertezza: dovunque ci sia l'infinito, e non ci sia un'infinità di probabilità di perdere contro quella di vincere, non c'è da esitare: bisogna dar tutto. ((10), trad. it. 74)

Facciamo incidentalmente notare che ciò che è importante sottolineare in questo ragionamento, come scrive il filosofo Simona Morini (8), è il punto di vista nuovo che le nostre credenze possano essere giustificate, anche in mancanza di prove, sulla base di ragioni pratiche, "spostando il livello della discussione dallo *stabilire un fatto* (livello teorico) al *giustificare un'azione* (livello pratico)". Tuttavia ben presto è risultato chiaro[7] che il valore atteso non può essere sempre preso come

[4]Del resto questa nota "scommessa", come è stato recentemente notato (9), già precedentemente era stata avanzata in testi di differente natura

[5]Pascal (contemporaneamente, va ricordato, a Christian Huygens) aveva originariamente coniato il concetto di valore atteso alla metà del XVII secolo per risolvere il problema della divisione della posta nel caso di un gioco d'azzardo interrotto. Pensiamo per esempio al gioco del "testa o croce", dove vince il giocatore che riesca a vincere per primo, diciamo, 5 prove. Supponiamo che, per qualsiasi ragione, il gioco è interrotto quando uno dei giocatori ha già vinto tre prove, mentre l'altro solo una: quale sarebbe la distribuzione giusta della posta? Secondo Pascal e Huygens ad ogni giocatore dovrebbe essere data parte della posta in accordo proprio al valore atteso. Il problema, ormai ben noto a quei tempi, era stato anche affrontato, tra gli altri, da Luca Pacioli e Nicolò Tartaglia agli inizi del XVI secolo

[6]Come commenta il filosofo Paolo Garbolino (4), inquadrato nel suo contesto, l'argomento non è senza fondamento. Se tu sei uno scettico coerente con i tuoi principi, non puoi dire che sei certo che la religione sia falsa, perché non puoi esser certo di nulla; ma se ammetti di avere una probabilità soggettiva, per quanto piccola, maggiore di zero nella verità della religione, allora devi fare i conti con la regola del valore previsto

[7]Eccellenti introduzioni storiche alla critica del valore atteso e allo sviluppo del concetto di utilità possono trovarsi in (11), (1) e (12)

criterio per determinare la decisione ottimale, e la teoria dovrà tener conto anche di tutte (tante) queste situazioni. Vediamo perché.

2.1 Il paradosso di San Pietroburgo

Consideriamo il seguente caso: ci viene proposto di scommettere tutto il nostro patrimonio (M_0) su una moneta che ha il 51% di probabilità di dare testa; il valore atteso di questo gioco, scegliendo di giocare e scommettendo che esca "testa" è $0.02M_0$, positivo[8]: si dovrebbe quindi accettare di giocare comunque! Il seguente esempio chiarisce in modo ancora più chiaro i problemi di tale criterio. Consideriamo un gioco che ci garantisce di perdere con probabilità $(1-10^{-6})$ tutti i nostri averi (M_0) e con probabilità 10^{-6} di vincere $(10^6+1)M_0$: ovviamente nessun essere razionale accetterebbe di partecipare ad un gioco simile nonostante abbia valore atteso positivo! L'esempio classico è il cosiddetto *paradosso di San Pietroburgo*. Il problema consiste nel determinare qual è la giusta tariffa da pagare per partecipare ad un gioco il cui premio è 2^n€, con n pari al numero di lanci che si fanno prima che si presenti testa con una moneta onesta. Spieghiamo meglio. In un ipotetico gioco d'azzardo, basato sulla scommessa "testa o croce" sul lancio di una moneta, bisogna pagare una quota di ingresso, Q, per partecipare ad una fase del gioco. Ciascuna fase consiste nel lanciare ripetutamente una moneta (onesta) finché non esce testa, che dà luogo alla vincita. La vincita dipende dal numero di lanci: se esce testa al primo lancio, si vince 2 (€ o qualsiasi altra valuta ovviamente); se esce croce, si raddoppia ad ogni lancio successivo. In breve, si paga Q e si vince 2^n, se la moneta è stata lanciata n volte quando compare testa per la prima volta. Alla fine dei lanci si è dunque certi di incassare un premio, ma quanto si è disposti a pagare per partecipare al gioco? Per calcolare il valore atteso di questo gioco dobbiamo sommare, per tutti i possibili eventi, la probabilità moltiplicata per il premio. La probabilità di ottenere testa all'ennesimo lancio è $(1/2)^n$; d'altra parte il premio che si ha se si presenta testa all'ennesimo lancio è pari a 2^n. Il prodotto probabilità per premio è $(1/2)^n * 2^n$, che è sempre pari ad 1, indipendentemente da quando si presenta testa. Tuttavia in teoria è possibile che testa si presenti al primo lancio, al secondo, al terzo,... fino all'infinito: così il valore atteso è dato dalla somma di infiniti ı1ȷ, quindi è infinito. In formule: $\sum_{i=1}^{\infty}(2)^{-n}(2)^n=\infty$. Dunque il valore atteso è infinito. Questo implica che se si utilizzasse il valore atteso come criterio, bisognerebbe essere disposti a pagare qualsiasi cifra pur di partecipare: ovvero ogni persona "razionale" non dovrebbe rinunciare a questa possibilità per nessuna cifra. Infatti anche pagando molti milioni di euro per volta, "alla lunga" dovrà capitare la circostanza (certo con probabilità bassissima) di una vincita così eccezionale da ripagare tutte le altre quote pagate per ottenere piccole vincite. Tuttavia nessuna persona "avveduta", potremmo così dire, sarebbe disposta a pagare una cifra "alta". E questa scelta è giustificata dal fatto che statisticamente il 97% delle volte esce testa prima del 5° lancio[9], con

[8] Il valore atteso infatti in questo caso è pari a $0.51M_0-0.49M_0 = M_0(0.51-0.49) = 0.02M_0$

[9] Questa affermazione sarà giustificata da una prossima tabella, dove saranno riportati i primi termini delle grandezze di interesse del paradosso. Il lettore interes-

una vincita al massimo pari a 2^5€, cioè 32€. E quasi sicuramente perderemmo tutti i nostri averi prima di incontrare la circostanza (comunque possibile) che ci farebbe guadagnare una cifra strepitosa.

Quale criterio usare quindi se quello del valore atteso spesso non funziona (*ogni qualvolta che, di fatto, non ci troviamo a ragionare con risorse virtualmente infinite*)?

Fu Daniel Bernoulli[10] (2), in una memoria intitolata *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis* scritta nel 1731 e contenuta nel volume dei *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* pubblicato nel 1738, a suggerire di utilizzare in luogo del valore atteso un *valore morale* o *utilità attesa* (*emolumentum*) che una persona è disposta a spendere e che *dipende dal patrimonio che possiede*, ovvero è un valore soggettivo.

Il paradosso di San Pietroburgo (dal luogo appunto di pubblicazione del periodico nel quale l'articolo di Daniel Bernoulli apparve la prima volta) iniziò in verità, come ricorda nell'articolo anche Daniel Bernoulli, con una lettera di Nicolas Bernoulli, cugino di Daniel, al matematico parigino Pierre Rémond Montmort. Il 9 settembre 1713 Nicolas Bernoulli scriveva infatti[11]:

> Quarto problema. A promette di dare una moneta a B se con un dado onesto farà uscire 6 al primo lancio, due monete se farà uscire 6 al secondo lancio, tre monete se otterrà questo punteggio al terzo, quattro monete se il risultato sarà raggiunto al quarto e così via. Ci si chiede: quale è il valore aspettato di B?
>
> Quinto problema. Ci si chiederà la stessa cosa se A prometterà a B di dargli delle monete nella progressione 1, 2, 4, 8, 16, etc. o 1, 3, 9, 27, etc. o 1, 8, 27, 64, invece che nella progressione 1, 2, 3, 4, 5, etc. come precedentemente trattato. Sebbene per la maggior parte questi problemi non siano di difficile risoluzione, vi scoprirete tuttavia qualcosa di molto curioso.

A quel tempo il concetto matematico di valore aspettato non era affatto distinto dal suo uso ordinario, il paradosso quindi metteva in luce contraddizioni fondamentali dal punto di vista teorico. In una successiva lettera a Montmort (20 febbraio 1714), scriveva ancora Nicolas Bernoulli.

sato comunque, utilizzando una simulazione automatica del gioco disponibile all'indirizzo http://www.mathematik.com/Petersburg/Petersburg.html (visitato l'8/04/2007), può sperimentare personalmente i possibili risultati

[10]Dalla fine degli anni Sessanta alla fine degli anni Settanta del XVIII secolo otto uomini della famiglia Bernoulli sono stati segnalati come matematici degni di lode. Daniel in particolare è il secondo figlio di Johann ed il nipote di Jacob, ed oltre alla matematica insegnò a Basilea anatomia, botanica, fisiologia e fisica

[11]Parte della corrispondenza relativa al paradosso di San Pietroburgo è disponibile in rete, a cura di Richard J. Pulskamp, all'indirizzo http://cerebro.xu.edu/math/Sources/Montmort/stpetersburg.pdf (visitato il 21/09/2006). Si veda anche http://www.math.fau.edu/Richman/Ideas/petersburg.htm (visitato il 21/09/2006). Da questa documentazione abbiamo tratto le prossime quattro brevi citazioni

> Da tutto ciò deduco che la stima corretta di un certo valore aspettato non è sempre la media che si ricava dividendo per la somma di tutti i casi possibili la somma del prodotto di ogni valore aspettato per il numero del caso che lo produce; il che risulta essere contrario alla nostra regola di base[12].

Nello scambio epistolare fu coinvolto successivamente anche il matematico e professore di filosofia Gabriel Cramer, allievo di Johann Bernoulli. Il 21 maggio 1728 egli scriveva a Nicolas Bernoulli.

> Non so se mi sbaglio, ma credo di avere la soluzione del singolare caso che Lei ha proposto al Signor de Montmort nella Sua lettera del 9 settembre 1713, Prob. 5, pagina 402. Al fine di semplificare il caso supporrò che A lanci in aria una moneta, B si impegni a dargli una moneta se uscirà testa al primo lancio, 2 se uscirà al secondo, 4 se uscirà al terzo, 8 se uscirà al quarto e così via. Il paradosso sta nel fatto che il calcolo darà come risultato che A dovrà dare a B una somma infinita, il che sembrerebbe assurdo poiché nessuna persona di buon senso darebbe 20 monete. Ci si chiede la ragione della differenza tra il calcolo matematico e quello elaborato dalla gente comune. *Credo che derivi dal fatto che i matematici valutano il denaro in proporzione alla sua quantità, mentre gli uomini di buon senso in proporzione all'uso che ne fanno.*(Il corsivo è nostro)

Cramer continua proponendo di tener conto, al posto del valore aspettato, di una opportuna utilità attesa proporzionale alla radice quadrata del valore guadagnato. Notiamo anche che è Cramer ad utilizzare per primo, in passi differenti di questa stessa lettera, le espressioni valore morale e speranza morale al posto di utilità attesa media, espressioni che anche Bernoulli utilizzerà talvolta in futuro. Per esempio Cramer scrive:

> Perciò, parlando da un punto di vista morale la speranza morale è ridotta a [...], e il mio equivalente a tanto, che sembrerebbe molto più ragionevole dell'infinito. Si potrà trovarne uno ancora più piccolo attraverso altri assunti del valore morale dei ricchi.

Anche il celebre matematico Leonhard Eulero[13] scrisse un articolo sul tema (di cui non si conosce il periodo esatto), che fu pubblicato nel 1862 con il titolo di *Vera estimatio sortis in ludis* (3).

2.2 La soluzione di Bernoulli

Daniel Bernoulli propose nel suo saggio una soluzione (che divenne famosa anche per l'intervento di Pierre Simon de Laplace, che subito la sponsorizzò) basata sull'utilità attesa percepita dal soggetto decisore.

[12] Nicolas Bernoulli si riferisce qui con "regola di base" alla definizione teorica di valore aspettato (n.d.a.)

[13] Amico della famiglia Bernoulli, che visse a San Pietroburgo quando Daniel lavorava all'Accademia Imperiale

In questo approccio il problema diventa così quello della valutazione soggettiva dell'utilità. Notiamo subito che questa utilità non è sempre identificabile letteralmente in termini monetari, ma in generale riassume diverse dimensioni di valore: denaro, piacere, speranza, e tutto quello che in linea di principio può contribuire all'utilità di un certo stato del mondo, nel senso di aumentare la nostra felicità. Può, però, essere espressa come numero reale, che in prima approssimazione racchiude in sé tutti gli aspetti della desiderabilità di questo stato del mondo per un individuo.

Bernoulli, dopo aver argomentato nel suo scritto che il criterio del valore atteso non è universalmente applicabile[14], propone quanto segue. Si supponga che una persona possieda una certa quantità di moneta x, e ne riceva una certa altra quantità $\triangle x$. Bernoulli sostiene che il valore relativo di tale incremento è direttamente proporzionale a $\triangle x$, e inversamente proporzionale a x, ovvero $\triangle y = k\triangle x/x$ dove k è una costante, da cui $y = a + k\log x$, ovvero $y = k\log\frac{x}{\alpha}$[15].

Lo stesso Laplace a questo proposito precisa che

> il valore relativo di una somma infinitesima è pari al suo valore assoluto diviso la fortuna totale a disposizione della persona. ((6), trad. ingl. 23)

Ossia, anche qui, una buona rappresentazione dell'utilità per una persona che possieda un patrimonio pari a m è data dal logaritmo di m. Laplace aggiunge che una persona che dispone di 200 franchi non dovrebbe pagarne più di 9 per partecipare al gioco del paradosso di San Pietroburgo. In generale secondo questo assunto l'utilità attesa risultante da un piccolo incremento della ricchezza dovrebbe essere inversamente proporzionale alla quantità di beni posseduta in precedenza; ovvero, come direbbe un economista, al crescere della quantità di un bene x posseduta dall'individuo, l'*utilità marginale* di quantità aggiuntive mostra un andamento decrescente. In termini matematici questa legge afferma che *l'utilità come funzione del denaro è una funzione concava*. Il valore del denaro, in altri termini, non è assoluto, ma dipende da quanto se ne possiede: una certa somma vale tanto per chi ne ha poco, e poco per chi ne ha molto. Per spiegare ancora questo punto, si consideri un insieme x che rappresenti importi monetari e una funzione u tale che per ogni importo x, $u(x)$ esprima il "gradimento" di guadagnare x. Si è condotti a credere che successivi incrementi di capitale portino al proprietario soddisfazione minore via via più piccola, quindi possiamo ipotizzare che la funzione u sia concava. Ad esempio un incremento di stipendio da 15000 a 30000 euro consente un miglioramento di vita nettamente superiore a quello che si ha da 100000 a 115000. In generale, poiché un bene ha

[14] A questo proposito Bernoulli presenta subito un esempio ((2) vedi di seguito traduzione italiana): " [...] supponiamo che un povero venga in possesso di un biglietto di lotteria con il quale potrebbe vincere con uguale probabilità 20000 ducati o nessuno [...] agirebbe in maniera stolta se lo vendesse per 9000?"

[15] Ricordiamo che sommare un incremento piccolo della ricchezza dx diviso la ricchezza totale $x$equivale ad eseguire l'operazione $\int\frac{dx}{x}$che altro non è che la funzione logaritmo di x(per valori positivi di x). Abbiamo indicato con $\alpha = -k\log a$

#	$P_{(vincita)}$	$P_{(perdita)}$	*premio*	$P \cdot premio$	Utilità $\log_e(premio)$	$P \cdot utilità$
1	0.5	0.5	2	1	0.69315	0.34657
2	0.25	0.75	4	1	1.3863	0.34657
3	0.125	0.875	8	1	2.0794	0.25993
4	0.0625	0.9375	16	1	2.7726	0.17329
5	0.03125	0.96875	32	1	3.4657	0.1083
6	0.015625	0.98438	64	1	4.1589	0.064983
7	0.0078125	0.99219	128	1	4.852	0.037906
8	0.0039063	0.99609	256	1	5.5452	0.021661
9	0.0019531	0.99805	512	1	6.2383	0.012184
10	0.00097656	0.99902	1024	1	6.9315	0.006769

lo scopo di soddisfare un bisogno, qualsiasi bene avrà un'utilità marginale decrescente: le prime parti del consumo sono quelle che placano i bisogni, mentre le successive avranno valore minore fino alla soddisfazione completa (per una persona affamata un pezzo di pane avrà un alto valore, ma tale valore decrescerà con la quantità di pane mangiato)[16].

Per calcolare l'utilità attesa di una decisione l'idea di Bernoulli è quella di usare una formula molto simile a quella del valore atteso, ma di sostituire al valore monetario M_i l'utilità che tale valore M_i fornisce al soggetto decisore: in formule $UA = \sum_i p_i u(M_i)$.

Nella tabella abbiamo ritenuto utile riportare i primi termini delle grandezze di interesse del paradosso di San Pietroburgo. Si noti che mentre il valore atteso è costante e vale sempre 1, l'utilità attesa diminuisce all'aumentare del numero di lanci. In particolare la somma dell'utilità attesa è limitata e tende al valore di 1.39.

Seguendo il suggerimento del fisico e filosofo Edward T. Jaynes (5), abbiamo analizzato con l'ausilio di calcoli numerici le affermazioni di Laplace: per un giocatore la cui fortuna iniziale è m, la somma onesta da pagare $f(m)$ si ottiene eguagliando la sua utilità attuale ($\log(m)$), ossia prima di giocare, con l'utilità attesa se paga la somma e gioca:

$$\log_e(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log_e(m - f + 2^n)$$

Il secondo membro dell'equazione non è altro che la probabilità di vincere al lancio ennesimo $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ moltiplicata per l'utilità sopra definita. Risolvendo nu-

[16]Molti economisti, come ricorda Savage (11), furono subito entusiasti del ragionamento di Bernoulli. Savage per esempio cita il commento di Alfred Marshall (7), "perché dovrebbe un povero altrimenti camminare in una pioggia che spinge un ricco a chiamare un taxi?". Il contributo di Bernoulli segnò anche l'inizio di quella che in economia è chiamata spesso *rivoluzione marginalista* (secondo la quale il principio per la determinazione dei valori di scambio, i prezzi, è fondato sul concetto di utilità marginale) e costituì il presupposto di studi successivi quali quelli di William Stanley Jevons, Carl Menger, Léon Walras, fino ai lavori di John von Neumann e Oskar Morgenstern

mericamente l'equazione si ottiene che per un patrimonio iniziale di 200 franchi la quota di ingresso onesta per questo gioco è 8.72 franchi (risultato ottenuto di fatto da Laplace senza avere a disposizione un computer). Allo stesso modo abbiamo ricavato che per un patrimonio iniziale di, diciamo, 1000 o 100000 euro la quota d'ingresso è rispettivamente 10.95 e 17.56 euro. E perfino con un patrimonio di un miliardo di euro non si dovrebbe pagare più di 24.20 euro! È da molti riconosciuto che questo ragionamento, anche se sembra provenire più da considerazioni di carattere descrittivo che normativo e comunque non funziona per piccolissime o enormi somme (vedi su questo punto sempre (5)), fornisce senz'altro un approccio convincente ed ha avuto l'indubbio merito di mettere in luce come il solo criterio del valore atteso non tenesse in alcun conto i "costi" del rischio. Se l'utilità aumenta in accordo ad un andamento logaritmico si può razionalmente accettare una somma inferiore al valore atteso, ma sicura, piuttosto che rischiare di non vincere nulla (avversione al rischio). Riassumendo, il punto centrale del ragionamento di Bernoulli-Laplace è che in questi casi per una decisione razionale si deve massimizzare l'utilità attesa (o minimizzare la perdita attesa) e non il profitto in assoluto (valore atteso).

Riferimenti bibliografici

[1] Arrow K.J., 1951: *Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations*, Econometria, 19, pp. 407-437

[2] Bernoulli D., 1738: *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*, in *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Tomus V, vol V, pp.175-192

[3] Eulero L., 1862: *Vera estimatio sortis in ludis*, in *Opera Postuma I*, ed. Louis Gustave du Pasquier, Zurigo

[4] Garbolino P., 1997: *I fatti e le opinioni. La moderna arte della congettura*, Laterza, Roma-Bari

[5] Jaynes E.T., 2003: *Probability theory the logic of science*, Cambridge University Press, Cambridge

[6] Laplace P.S., 1814: *Essai Philosophique sur les Probabilités*, Parigi; (trad. in lingua inglese *A Philosophical Essay on Probabilities*, Dover, New York, 1951)

[7] Marshall A., 1890: *Principles of Economics*, McMillan, Londra

[8] Morini S., 2003: *Probabilismo. Storia e teoria*, Bruno Mondadori, Milano

[9] Morini S., Perconti P., 2006: *E-mail filosofiche. Di grandi idee e problemi quotidiani*, Raffaello Cortina Editore, Milano

[10] Pascal B., 1670: *Pensées sur la Religion*; (trad. it., *Pensieri*, Einaudi, Torino, 1960)

[11] Savage L.J. 1974: *The foundation of statistics*, seconda edizione, Dover (prima edizione 1954, Wiley, New York)

[12] Stigler G. J., 1950: *The Development of Utility Theory*, Journal of Political Economy, Part I, 58, pp. 307 – 327: Part II, 58, pp. 373 – 396

3 Nota sulla traduzione

Questa traduzione italiana[17] cerca di essere il più fedele possibile al testo originale latino di Daniel Bernoulli. È stata comunque vista anche la traduzione inglese ad opera di Louise Sommer dell'American University di Washington D.C.[18] (e la traduzione in francese di quest'ultimo documento a cura di Robert Mille, Ecole Polytechnique di Parigi[19]), come la più recente traduzione francese dal testo latino eseguita da Raoul Charreton, Ecole des Mines di Parigi[20].

I termini *attesa*, *valore atteso*, *valore dell'attesa*, *valore dell'opportunità* o semplicemente *opportunità* sono stati impiegati in italiano per rendere concetti non sempre esplicitamente distinguibili nell'originale latino, dove si usa generalmente il termine *expectatio*[21].

In linea con l'interpretazione universalmente accettata abbiamo tradotto il termine *emolumentum* con *utilità*. Bernoulli non definisce il termine né fornisce sinonimi. Alcuni indicano l'origine più probabile del termine[22] nel verbo latino *emolo* (letteralmente *macinare*; emolumentum originariamente iniziò così ad indicare il compenso dovuto a chi macinava, per esempio, una certa quantità di frumento, e pian piano significò in generale la somma corrisposta per pagare una qualunque prestazione professionale). I sinonimi latini più conosciuti sono *lucrum, quaestus, compendium, fructus* e *redditus*, e di norma è tradotto letteralmente come vantaggio.

A volte Bernoulli si allontana da una terminologia strettamente matematica, e adotta il linguaggio della vita di tutti i giorni. Pur essendo il latino una lingua già morta al tempo di Bernoulli, e aggiungendo questa traduzione un ulteriore salto linguistico, il senso del ragionamento resta a nostro avviso sufficientemente chiaro. Ciononostante abbiamo di quando in quando aggiunto nel testo alcune parole, racchiuse tra parentesi quadre, ed inserito delle note a piè di pagina (che quindi sono nostre, ove non esplicitamente indicata diversa origine) per rendere la lettura più immediata possibile.

---

[17] La traduzione, comunque sotto la totale responsabilità degli autori firmatari, è stata effettuata con contributi consulenziali di Valeria Marocchi, Cesare Piccolo e Luca Scalia

[18] *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*, Econometria, Vol. 22, No. 1. (Jan., 1954), pp. 23-36. Come indicato nelle References di questo documento, una prima traduzione del testo latino fu fatta in tedesco nel 1896: Pringsheim, Alfred, *Die Grundlage der modernen Wertlehre: Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen* (Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis). Aus dem Lateinischen übersetzt mit Erläuterungen versehen von Alfred Pringsheim. Leipzig, Dunker und Humbolt, 1896, Sammlung älterer und neuerer staatswissenschaftlicher Schriften des In- und Auslandes hrsg. von L. Brentano un E. Lesser, No. 9

[19] *Exposé d'une théorie nouvelle sur l'évaluation du risque, Revue de statistique appliqué*, tome 19, No. 3 (1971), pp. 5-18

[20] *Esquisse d'une théorie nouvelle de mesure du sort*, Cahiers du séminaire d'histoire des Mathématiques, tome 6 (1985), pp. 61-77

[21] Nel latino classico in effetti il termine esatto sarebbe Exspectatio, da spectare, guardare. Un ex davanti il termine comune sta di norma a significare che si guarda da un punto verso qualcosa di indeterminato, qualcosa che ancora non c'è. La parola indica il punto di partenza dell'azione e assume il significato di attendere

[22] Vedi su questi aspetti l'articolo all'indirizzo
http://www.uned.es/personal/dteira/docs/expectedutility.pdf (visitato il 12/12/2007)

4 Presentazione di una nuova teoria sulla valutazione del rischio

Daniel Bernoulli

***Specimen theoriae novae de mensura sortis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 1738, Tomus V, vol V, pp 175-192.**

§ 1. Da quando cominciarono a studiare la misura dei rischi[23], tutti i matematici hanno sempre affermato che *il valore atteso*[24] *si ottiene moltiplicando il valore di ogni possibile guadagno*[25] *per il numero delle possibilità che esso si verifichi e dividendo la somma di questi prodotti per il numero totale dei casi possibili: giova comunque considerare casi che siano tutti tra loro ugualmente possibili.* Una volta accettata questa regola, nel quadro della suddetta teoria, quel che resta è enumerare tutti i casi possibili, scomporli in termini di uguale probabilità ed infine suddividerli in opportune classi.

§ 2. Si vedrà che le dimostrazioni di questo enunciato, se le si esamina correttamente, si basano tutte su una stessa ipotesi: *nella misura in cui non esiste ragione perché tra due pretendenti uno debba ottenere più dell'altro, quel che spetta a ciascuno dei due dovrà essere considerato come di ugual valore*[26].

Non va presa in considerazione alcuna ragione legata alla condizione particolare delle persone, ma bisogna considerare pertinenti soltanto quelle ragioni che riguardano i termini del rischio[27]. I giudici supremi designati dalla pubblica autorità potrebbero così dare i risultati. Ma, in realtà, in questo caso non servono sentenze, ma consigli [sulle decisioni da prendere]; vale a dire delle regole valide per chiunque debba valutare il proprio rischio[28] in funzione delle proprie specifiche situazioni finanziarie.

§ 3. Per chiarire quanto affermato, è utile considerare il caso di un uomo molto povero al quale capita per le mani un biglietto della lotteria[29] che permette di ottenere, con pari probabilità, assolutamente niente, oppure ventimila ducati.

[23] *Mensuras sortium*

[24] *Expectatio*

[25] Ancora *expectatio*

[26] Letteralmente: *cioè che non essendoci nessuna ragione per cui tra due che attendono debba essere dato più al primo che al secondo, a ciascuno le parti devono essere assegnate uguali.* Probabilmente per una maggiore chiarezza dell'esposizione, altre traduzioni interpretano questo passaggio nel seguente modo *"dal momento in cui non esiste alcuna ragione di ammettere che tra due persone che si trovino in presenza di rischi identici, l'una piuttosto che l'altra si debba aspettare che i propri desideri siano più strettamente soddisfatti, i rischi considerati dall'una piuttosto che l'altra dovranno essere visti come di uguale valore"* (cfr. le traduzioni di Sommer, Mille e Charreton). Il latino è comunque il seguente: *"Quod cum nulla sit ratio, cur expectanti plus tribui debeat uni quam alteri, unicuique aequae sint adiudicandae partes"*

[27] *Ad conditiones sortis*

[28] *Sortem.* In latino, *sors* ha un significato ben più esteso dell'italiano sorte: sorte, fato, responso, lotteria, tiro a sorte, "dado", che praticamente Bernoulli si diletta ad usare tutte

[29] Ancora *sortem*

Se costui valutasse la sua opportunità[30] diecimila ducati, avrebbe comunque torto a cedere il biglietto per novemila ducati? Personalmente non lo credo e peraltro ritengo che ad un uomo molto ricco non converrebbe rifiutare di comprare il biglietto della lotteria a quello stesso prezzo [novemila ducati]. Se non vado errato quindi, è chiaro che non tutti possono applicare la stessa misura per valutare lo stesso rischio e non si può dunque aderire alla regola del § 1. Chiunque consideri il problema con attenzione, si convincerà che il concetto di *valore*, del quale abbiamo fatto uso nella regola su esposta, deve essere definito in maniera che renda il metodo accettabile da tutti senza riserva. Per arrivare a ciò, la determinazione stessa del *valore* di un oggetto non sarà fondata sul suo prezzo, ma *sull'utilità*[31] che esso comporta. Il prezzo di una cosa dipende solo dalla cosa stessa, è lo stesso per tutti; ma l'*utilità* [il vantaggio che quella data cosa comporta] dipende dalle condizioni di ciascuno[32]. Così è fuori dubbio che il guadagno di mille ducati sia più rilevante per un uomo povero che per uno ricco, benché la cifra [ottenuta] sia la stessa per entrambi.

§ 4. Basandosi solo sulle precedenti argomentazioni[33], qualcuno potrà convincersi che si tratta soltanto di cambiare una parola [*valore* $\mapsto$ *utilità*]. Ma trattandosi di un'ipotesi completamente nuova, credo si rendono invece necessarie alcune delucidazioni. Di conseguenza è bene spiegare con un esempio il frutto della mia riflessione. Per il momento ci avvarremo della seguente regola come punto di partenza: *moltiplicando ogni singola opportunità di profitto*[34] *per il numero di casi nel quale può capitare di ottenerlo, e dividendo la somma dei prodotti [così ottenuti] per il numero totale dei casi possibili, si otterrà una utilità media*[35]*, e il guadagno corrispondente a questa utilità equivarrà al rischio calcolato*[36].

§ 5. Si è così resa chiara questa verità: nessuna valutazione di un rischio può essere ottenuta se non si rende nello stesso tempo nota la sua *utilità*, in altri termini l'utilità che un guadagno, quale esso sia, porta ad un individuo e, viceversa, quanto guadagno ci vuole perché si ottenga una certa utilità; anche se sull'utilità è difficile dire alcunché di certo, dal momento che può cambiare secondo le circostanze. Così, benché da uno stesso guadagno generalmente tragga più utilità un uomo povero di uno ricco, si può tuttavia immaginare che un uomo ricco ma in prigione, che possieda duemila ducati e al quale ne servissero altrettanti per ritrovare la libertà, attribuirà più importanza a un guadagno di duemila ducati che non altri uomini meno ricchi di lui. Si possono immaginare innumerevoli esempi di questo genere, che rappresenterebbero però eccezioni di una rarità estrema. Considereremo così quel che accade ordinariamente e, per

[30] *Sortem suam*

[31] *Emolumentum*

[32] Il latino: "*valor non est aestimandus ex pretio rei, sed ex emolumento, quod unusquisque inde capessit. Pretium ex re ipsa aestimatur omnibusque idem est, emolumentum ex conditione persona*"

[33] Letteralmente: L'argomentazione è giunta ormai al punto che chiunque può cavarsela con il cambio di un'unica parola

[34] *Emolumenta singula expectata*, vantaggio, utilità attesa

[35] *Emolumentum medium*

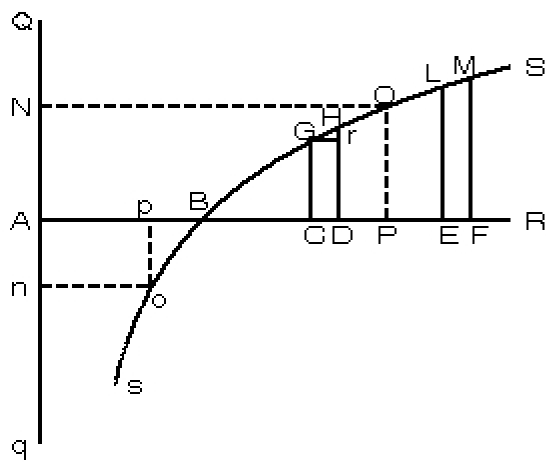
[36] Letteralmente *ricercato*

meglio afferrare il problema, ammetteremo che la ricchezza di un uomo possa essere aumentata a poco a poco in modo continuo per incrementi infinitamente piccoli. È altamente probabile che *ogni (anche minimo) guadagno, apporterà sempre un'utilità inversamente proporzionale alla somma dei beni già posseduti*[37]. Per spiegare questa ipotesi è necessario dire qui cosa intendo per somma di beni già posseduti. A mio parere, questa espressione comprende il vitto, l'abbigliamento, ogni cosa idonea a rendere la vita più comoda, e anche il lusso e tutto quel che può contribuire al soddisfacimento di ogni sorta di desiderio: così che non vi sia alcuna persona di cui si possa dire che non possieda nulla, a meno che non muoia letteralmente di fame. Per i più, la maggior parte di quel che si possiede, secondo la definizione precedente, deriverà dalla propria industriosità, che include perfino la stessa mendicità: chi mendicando si procura dieci monete d'oro l'anno, acconsentirà difficilmente ad accettare una somma di 50 monete d'oro alla condizione di non dover mendicare mai più, né di cercare di procurarsi del denaro in qualsiasi altro modo. Costui dovrebbe allora vivere di questa somma [50 monete d'oro], e quando l'avesse spesa tutta, anche la sua esistenza verrebbe a termine. Anzi, a tali condizioni dubito che anche chi è nullatenente e perseguitato dai debiti accetterebbe di liberarsi dei propri debiti e di ottenere un dono anche maggiore. Se in realtà il mendicante non volesse rifiutare un tale accordo se non a condizione che gli si paghino almeno cento monete d'oro, e se l'altro [l'uomo perseguitato dai suoi creditori] ne esigesse mille, noi potremmo dire che il primo è dotato di una fortuna di cento, e il secondo di mille monete d'oro, benché nel linguaggio comune quello non possieda nulla e questo meno di nulla.

§ 6. Avendo dato questa definizione, ritornerei a quanto detto nel paragrafo precedente, secondo cui, appunto, in assenza di elementi straordinari, *si può affermare che l'utilità risultante da piccolissimi accrescimenti della ricchezza è inversamente proporzionale alla quantità di beni posseduti.* Tenendo conto della natura umana, considero che l'ipotesi precedente abbia una validità accettabile per molte delle persone alle quali questo tipo di confronto può essere applicato. Poche persone non spendono la totalità del loro reddito annuo. Ma se tra di loro, un uomo ha un patrimonio di centomila ducati ed un altro un patrimonio dello stesso numero di mezzi-ducati, se il primo trae dalla sua fortuna un reddito annuale di cinquemila ducati, mentre il secondo trae dalla sua lo stesso numero di mezzi-ducati, è chiaro che un ducato per il primo ha esattamente la stessa importanza che mezzo-ducato per il secondo. Di conseguenza, se entrambi realizzano un guadagno di un ducato, il secondo uomo ne trae una utilità doppia, perché si è arricchito di due 'mezzi ducati'. Lo stesso ragionamento è applicabile a molte altre situazioni, che non sarà dunque il caso di discutere separatamente. Questa regola è tanto più valida per la maggioranza degli uomini che non hanno altra ricchezza che la loro capacità di lavoro, e della quale devono vivere. È vero, ci sono uomini per i quali un ducato ha più importanza che molti ducati per altri uomini meno ricchi ma più generosi. Ma singolarità di questo genere

[37]Latino : "Ita vero valde probabile est *lucrulum quodvis semper emolumentum afferre summae bonorum reciproce proportionale*"

non vanno considerate, visto che noi ora non prendiamo in considerazione altro che casi che riguardano un individuo [in stati differenti di ricchezza][38]. L'uomo che è per sua natura meno sensibile ad un guadagno sopporterà con maggiore pazienza una perdita. E tuttavia, visto che teoricamente si potrebbe andare avanti in casi particolari, tratterò prima il caso più generale, e svilupperò in seguito la nostra particolare ipotesi per dare soddisfazione a tutti.



§ 7. Rappresentiamo con AB la quantità di beni inizialmente posseduti. Dopo aver prolungato AB, occorre costruire una curva $BGLS$ della quale le ordinate CG, DH, EL, FM rappresentano le *utilità* corrispondenti alle ascisse BC, BD, BE, BF, che rappresentano gli incrementi della ricchezza. Inoltre, chiamiamo m, n, p, q, etc. i numeri di modi tramite i quali si possono ottenere gli accrescimenti di ricchezza BN, BD, , BE, BF. Allora l'*utilità* (secondo [quanto detto nel] § 4) sarà data da: $PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM}{m+n+p+q} + etc.$

Tracciamo AQ perpendicolare ad AR e riportiamo su questo asse $AN = PO$. La distanza $NO - AB$, cioè BP, rappresenta il guadagno che può essere legittimamente atteso. Se poi volessimo sapere quale posta una persona potrà essere incline a rischiare su questo tipo di proposta, la nostra curva dovrà estendersi in direzione opposta così che l'ascissa Bp corrisponda a una perdita e l'ordinata po rappresenti la perdita di utilità corrispondente. In un gioco leale, il danno risultante dalla perdita deve essere uguale all'utilità risultante dalla vincita: dobbiamo dunque ammettere che $An = AN$ oppure $po = PO$. In questo modo Bp rappresenterà la posta che non dovranno oltrepassare le persone che tenessero conto della loro propria situazione finanziaria.

Corollario 1

§ 8. Finora gli scienziati hanno generalmente fondato le loro ipotesi considerando che tutti i guadagni debbano essere valutati solamente in funzione di essi stessi, in altri termini delle loro qualità intrinseche e, considerando che questi

[38]Letteralmente: *Visto che in realtà noi a nostra volta prenderemo in considerazione quell'unico e medesimo individuo, questo non ci riguarderà per nessun motivo*

guadagni produrranno sempre un'*utilità* proporzionale al guadagno, la curva BS diventa una retta. Se noi abbiamo dunque $PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM}{m+n+p+q} + etc.$ e se introduciamo da una parte e dall'altra i rispettivi fattori, otteniamo di conseguenza che $PO = \frac{m \cdot BC + n \cdot BD + p \cdot BE + q \cdot BF}{m+n+p+q} + etc.$ che è in conformità con la regola comunemente accettata.

Corollario 2

§ 9. Se AB fosse infinitamente grande, anche rispetto a BF [il più grande guadagno possibile], come si spererebbe, allora l'arco BM potrebbe essere assimilato ad un segmento di retta infinitamente piccolo; anche in questo caso, si può applicare la regola usuale e si può continuare a considerarla approssimativamente valida nei giochi di scarsa importanza.

§ 10. Finora abbiamo trattato il problema nella maniera più generale possibile; rivolgeremo adesso la nostra attenzione all'ipotesi sopra citata perché essa merita veramente di essere esaminata prima delle altre. Per cominciare, bisogna interrogarsi sulla natura della curva sBS nel caso delle condizioni poste al § 7: poiché abbiamo dovuto considerare dei guadagni infinitamente piccoli, definiremo dei guadagni BC e BD all'incirca uguali, in modo che la loro differenza CD sia infinitamente piccola. Se noi tracciamo Gr parallela a BR, rH rappresenterà l'incremento di utilità infinitamente piccolo per una persona il cui patrimonio è AC e che ottiene il piccolo guadagno CD. Ciononostante questa utilità va confrontata non solo con il minimo guadagno CD, al quale è proporzionale restando invariata ogni altra cosa, ma anche con AC, il patrimonio precedentemente posseduto, al quale essa è inversamente proporzionale. Se poniamo quindi $AC = x$, $CD = dx$, $CG = y$, $rH = dy$ e $AB = \alpha$, otteniamo, essendo b una costante qualunque $dy = \frac{bdx}{x}$ o, meglio $y = b \log \frac{x}{\alpha}$. La curva sBS è dunque una curva logaritmica, della quale la subtangente[39] è in tutti i punti b e il cui asintoto è Qq.

§ 11. Confrontiamo ora questo risultato con ciò che è stato detto nel § 7: si ha che $PO = b \log \frac{AP}{AB}$, $CG = b \log \frac{AC}{AB}$, $DH = b \log \frac{AD}{AB}$, etc. Ma noi abbiamo $BP = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM}{m+n+p+q} + etc.$; ne consegue che $b \log \frac{AP}{AB} = \frac{\left(mb \log \frac{AC}{AB} + nb \log \frac{AD}{AB} + pb \log \frac{AE}{AB} + qb \log \frac{AF}{AB}\right)}{m+n+p+q} + etc.$ e di conseguenza

$AP = (AC^m \cdot AD^n \cdot AE^p \cdot AF^q)^{\frac{1}{m+n+p+q+etc}}$ e se noi sottraiamo AB, la

[39]Per illustrare che cosa intende esattamente qui Bernoulli per subtangente, riportiamo la relativa ed utile nota 4 della traduzione di Sommer, a cura del consulente matematico Karl Menger.

La tangente della curva $y = b \log \frac{x}{\alpha}$ al punto $(x_0, \log \frac{x_0}{\alpha})$ è la retta $y - b \log \frac{x_0}{\alpha} = \frac{b}{x_0}(x - x_0)$. Questa tangente taglia l'asse Y $(x = 0)$ al punto di ordinata $b \log \frac{x_0}{\alpha} - b$. Il punto di contatto della tangente con la curva ha l'ordinata $b \log \frac{x_0}{\alpha}$ come la proiezione di questo punto sull'asse delle Y. Il segmento tra i due punti indicati sull'asse Y ha lunghezza b. Questo segmento è la proiezione del segmento della tangente tra la sua intersezione con l'asse Y e il punto di contatto. La lunghezza di questa proiezione (eguale a b) è quel che Bernoulli chiama qui la "subtangente". Ai giorni nostri si intende con sottotangente della curva $y = f(x)$ al punto $(x_0, f(x_0))$ la lunghezza del segmento considerata sull'asse delle X (non delle Y) tra la sua intersezione con la tangente e la proiezione del punto di contatto. Questa lunghezza è $f(x_0)/f'(x_0)$. Nel caso della curva logaritmica, essa è eguale ad $x_0 \log \frac{x_0}{\alpha}$

grandezza BP rappresenterà il valore richiesto [il valore delle proposta di rischio in questione].

§ 12. Il paragrafo precedente suggerisce quindi la seguente regola: *ogni guadagno deve essere aggiunto alle ricchezze precedentemente possedute; la somma deve essere elevata alla potenza corrispondente al numero di modi possibili per i quali il guadagno può essere ottenuto; poi si fa il prodotto dei termini trovati. Dopodiché si estrae da questo prodotto una radice il cui grado è dato dal numero di tutti i casi possibili ed infine si sottrae dal risultato ottenuto la fortuna posseduta all'inizio: quel che rimane da questa operazione rappresenta il valore richiesto [il valore delle proposta di rischio in questione].* Questo principio è essenziale per la valutazione di proposte di rischio in diversi casi. Da qui mi piacerebbe trarre una teoria completa come è stato fatto per l'analisi tradizionale, se obblighi pregressi non m'impedissero di intraprendere questo lavoro per quanto utile ed originale esso possa essere. Mi contenterò dunque, per il momento, di dare atto dei punti più importanti tra quelli che a prima vista si sono resi percettibili.

§ 13. In primo luogo, sembra che in molti giochi, anche i più legali possibili, entrambi i giocatori possano attendersi di subire una perdita: vi è qui un avvertimento della natura per scongiurare il gioco. Ciò risulta dalla concavità della curva sBS verso BR. In effetti, rendendo la posta Bp uguale al guadagno atteso BP, è chiaro che la *disutilità*[40] po risultante da una perdita sarà sempre superiore all'utilità del guadagno atteso PO. Benché questo risultato sia piuttosto evidente per un matematico, lo illustrerei tuttavia con un esempio in modo che tutti possano comprenderlo. Immaginiamo dunque due giocatori che dispongano entrambi di cento ducati; ognuno scommette la metà del suo avere come posta in un gioco che offre le medesime possibilità ad entrambi i giocatori. In questa ipotesi, ognuno avrà cinquanta ducati, più la speranza di vincere ancora altri cento ducati. Tuttavia, la somma dei valori di questi due termini , secondo la regola del § 12, si eleva a $(50 \cdot 150)^{\frac{1}{2}}$ovvero a $\sqrt{50 + 150}$, ovvero meno di 87 ducati, così che, benché il gioco sia condotto in condizioni perfettamente eque per tutti e due i giocatori, ciascuno subirà una perdita attesa di oltre 13 ducati. Bisogna sottolineare bene questa verità, benché essa sia del tutto evidente: l'imprudenza di un giocatore sarà tanto più grande quanto più grande sarà la parte della ricchezza in suo possesso che egli punta in un gioco d'azzardo. Consideremo dunque l'esempio in cui uno dei due giocatori, prima di scommettere i suoi cinquanta ducati, ne possieda 200. Questo giocatore ha una perdita attesa di $200 - \sqrt{150 \cdot 250}$, che corrisponde a poco più di 6 ducati.

§ 14. Così, chi scommette una parte della propria fortuna, per quanto piccola essa sia, in un gioco d'azzardo matematicamente leale, si comporta in modo irrazionale: può dunque essere interessante ricercare quale deve essere l'entità del vantaggio di cui un giocatore deve disporre rispetto al suo avversario per evitare qualsiasi perdita attesa. Consideriamo un gioco che sia il più semplice possibile e definito da due esiti ugualmente probabili, dei quali uno sia favorevole e l'altro sfavorevole. Sia a il guadagno che si ottiene se l'esito è favorevole, e x

[40] *Detrimentum*

la posta che viene persa in caso di esito sfavorevole. Se la quantità iniziale di beni posseduti è α, noi avremo $AB = \alpha$, $BP = a$, $PO = b \cdot \log \frac{a+\alpha}{a}$ (vedi § 10) e poiché (secondo il § 7) $po = PO$, risulta dalla natura logaritmica della curva che $BP = \frac{\alpha \cdot a}{\alpha + a}$. Ma Bp rappresenta la posta x, dunque $x = \frac{\alpha \cdot a}{\alpha + a}$, grandezza che è sempre inferiore al guadagno atteso a. Ne consegue che una persona che rischi tutta la propria ricchezza agisce da stolto, per quanto elevata possa essere la vincita. Nessuno troverà difficile persuadersene, se avrà studiato con attenzione le definizioni che abbiamo dato sopra. Inoltre questo risultato fa luce su una proposizione che, nella vita quotidiana, è universalmente ammessa: può darsi che sia ragionevole per alcuni individui investire del denaro in una impresa dubbia, senza in questo modo impedire che ciò sia cosa irragionevole per altri.

§ 15. A proposito dei nostri temi, il metodo tradizionalmente usato dai commercianti per assicurare il trasporto marittimo di mercanzie merita un'attenzione particolare. Per spiegare questo faremo di nuovo uso di un esempio. Supponiamo che Caio, mercante di San Pietroburgo, abbia acquistato ad Amsterdam delle merci che, se ne disponesse a San Pietroburgo, potrebbe vendere per diecimila rubli. Dà dunque ordine di spedire queste merci via mare e si chiede se assicurarle o meno. È ben informato del fatto che in questo periodo dell'anno, su cento navigli che fanno la rotta da Amsterdam a San Pietroburgo, generalmente cinque vanno perduti. Tuttavia non vi è assicurazione disponibile a meno di 800 rubli per carico: una tariffa che egli giudica davvero troppo elevata. Ci si chiede allora: quale patrimonio deve possedere Caio, al di là delle mercanzie acquistate, perché possa ragionevolmente persuadersi di non assicurarle? Se x rappresenta la sua ricchezza, questa, aggiunta al valore aspettato che le sue mercanzie arrivino a buon approdo, è $\sqrt[100]{(x+10000)^{95}x^5} = \sqrt[20]{(x+10000)^{19}x}$ nel caso in cui egli si astenga dall'assicurarsi. Con l'assicurazione invece la sua fortuna diventerà con certezza $x+9200$. Uguagliando queste due grandezze, si ottiene $(x+10000)^{19} \cdot x = (x+9200)^{20}$ ossia approssimativamente $x = 5043$. Se dunque Caio, al di là della speranza di mantenere le sue mercanzie, possedesse una somma superiore a 5043 rubli, farebbe bene a non contrarre l'assicurazione. Al contrario, se la sua fortuna fosse minore di questa somma, egli farebbe bene ad assicurare il suo carico. Se ci fossimo chiesti quale ricchezza minima deve essere posseduta da colui che offrisse la sua garanzia [assicurazione], bisognerebbe rispondere così: se la fortuna ricercata è y, allora $y = \sqrt[20]{(y+800)^{19} \cdot (y-9200)}$, ovvero approssimativamente $y = 14243$, valore che possiamo dedurre dal calcolo precedente senza ulteriori approfondimenti. Un uomo meno ricco sarebbe pazzo a proporre l'assicurazione, ma un uomo più ricco sarebbe del tutto ragionevole a farlo. Ciò che precede fa chiaramente vedere quanto l'introduzione di questa sorta di assicurazione possa essere utile, in quanto essa offre dei vantaggi a tutte le parti interessate. Nello stesso modo, se Caio potesse ottenere l'assicurazione per seicento rubli, sarebbe imprudente a rifiutare se la sua fortuna fosse minore di 20478 rubli, ma agirebbe con troppe precauzioni assicurando le sue mercanzie [alla tariffa proposta] se la sua fortuna fosse stata superiore a questa cifra[41]. Agirebbe pure da sconsider-

[41]Letteralmente: *ma agisce con troppe precauzioni se la sua mercanzia viene assicurata per*

ato un uomo che offrisse di garantire la detta assicurazione per seicento rubli qualora egli stesso ne possedesse meno di 29878, mentre agirà bene, facendo in questo modo, colui che ne possedesse di più. Ma comunque nessun uomo, per quanto ricco, gestirebbe correttamente i suoi affari se rispondesse personalmente dell'assicurazione per meno di cinquecento rubli.

§ 16 Da questa teoria si può dedurre un'altra regola che può rivelarsi utile. È certamente raccomandabile dividere in più parti beni che sono esposti ad un pericolo, piuttosto che rischiarli tutti insieme nella loro totalità. Anche questa volta porterò un esempio. Sempronio nel suo paese dispone di beni per un totale di 4000 ducati; possiede inoltre – per un valore di 8000 ducati – delle mercanzie all'estero, da dove non è possibile trasportarle se non via mare. Una lunga esperienza tuttavia mostra che su dieci navigli, uno non riesce ad arrivare a destinazione. In queste condizioni, ritengo che se Sempronio affidasse le sue mercanzie ad un solo naviglio, il valore atteso dalle sue mercanzie sarebbe 6751 vale a dire $\sqrt[10]{12000^9 \cdot 4000^1} - 4000$.

Se invece affidasse parti uguali delle sue mercanzie a due navigli, il valore atteso sarebbe $\sqrt[100]{12000^{81} \cdot 8000^{18} \cdot 4000} - 4000 = 7033$ducati. In questa maniera, il valore delle prospettive di successo di Sempronio diventerà tanto più favorevole quanto minore sarà la parte affidata ad ogni naviglio, senza tuttavia che questo valore possa mai superare 7200 ducati. Questo punto di vista può tornar utile anche a coloro che investono la loro ricchezza in titoli stranieri o in altre imprese a rischio.

§ 17. Sono costretto a tralasciare certe osservazioni, benché esse non siano affatto inutili. E, anche se una persona di natura giudiziosa potrebbe facilmente comprendere molte delle cose che ho fin qui spiegato ed applicarle di sua iniziativa, difficilmente qualcuno riterrebbe possibile definire questi argomenti con la precisione che abbiamo ritenuto di utilizzare nei nostri esempi. Tuttavia, dal momento che i nostri teoremi si accordano perfettamente con l'esperienza, sarebbe sbagliato tenerli in poco conto, come se essi non fossero altro che astrazioni fondate su ipotesi precarie. Conferma di quanto detto è data ulteriormente dall'esempio seguente, che ha ispirato le precedenti riflessioni e il cui contenuto è il seguente. Il mio rispettabilissimo cugino, l'illustre Nicolas Bernoulli, professore di entrambi i diritti[42] all'università di Basilea, un giorno sottomise cinque problemi all'autorevolissimo matematico Montmort. Tutti e cinque i problemi compaiono nel testo "L'analisi dei giochi d'azzardo" (L'analyse sur les jeux de hasard[43]) di M. de Montmort, p. 402. Egli enuncia così l'ultimo di questi problemi: *"Pierre lancia in aria una moneta e continua a farlo fino a che, una volta a terra, questa mostri "testa". Egli decide di dare a Paul un ducato se esce testa al primo lancio, due ducati se esce testa al secondo lancio, quattro al terzo, otto al quarto e così di seguito, in modo tale che il numero di ducati che deve pagare venga raddoppiato ad ogni lancio supplementare. Come determinare il valore aspettato di Paul?"* Mio cugino mi ha proposto questo problema in una lettera perché voleva conoscere il mio parere in proposito. Benché il calcolo usuale in-

più di 20478 rubli

[42]Diritto romano e diritto canonico

[43]In francese già nel testo originale di Bernoulli

dichi[44] che il valore aspettato dell'opportunità di Paul sia infinitamente grande, vi è modo, chiedeva lui, di accettare ragionevolmente che una persona sarebbe contenta di cedere la sua opportunità per venti ducati? Il metodo di calcolo comunemente ammesso valuta infatti le prospettive di Paul all'infinito, benché nessuno sia disposto ad acquistarle per un prezzo troppo elevato, e neppure a molto meno. Di fatto, se applicassimo la nostra nuova regola a questo problema, potremmo vedere la soluzione e districare il nodo. La soluzione del problema, secondo i nostri principi, è la seguente.

§ 18. Il numero di casi da considerare è infinito. Nella metà dei casi, il gioco avrà fine al primo lancio, in un quarto dei casi finirà al secondo, in un ottavo dei casi al terzo, in un sedicesimo al quarto e così via[45]. Se noi designiamo il numero dei casi fino all'infinito con N, è chiaro che in $\frac{1}{2}N$ di casi Paul vincerà un ducato, in $\frac{1}{4}N$ di casi guadagnerà quattro ducati, in $\frac{1}{16}N$ di casi otto ducati e così all'infinito. Chiamiamo αil patrimonio di Paul. Il valore in questione sarà allora $\sqrt[N]{(\alpha+1)^{\frac{N}{2}} \cdot (\alpha+2)^{\frac{N}{4}} \cdot (\alpha+4)^{\frac{N}{8}} \cdot (\alpha+8)^{\frac{N}{16}} \cdot etc.} - \alpha = \sqrt{\alpha+1} \cdot \sqrt[4]{\alpha+2} \cdot \sqrt[8]{\alpha+4} \cdot \sqrt[16]{\alpha+8} \cdot etc.$.

§ 19. Secondo questa formula con cui si calcola la vincita attesa da Paul, risulta che questo valore aumenterà con l'entità della ricchezza di Paul, ma non raggiungerà mai un valore infinito, a meno che la fortuna di Paul non diventi essa stessa infinita. Deduciamo inoltre i seguenti corollari. Se Paul non possedesse nulla, il valore della sua opportunità sarebbe $\sqrt{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[16]{8} \cdot etc.$il che è precisamente uguale a due ducati. Se possedesse dieci ducati, le sue opportunità varrebbero più o meno tre ducati; ne varrebbero più o meno quattro se la sua ricchezza fosse di 100 ducati, e dieci se ne possedesse mille di ducati. Si vede facilmente allora quale enorme ricchezza ci vorrebbe perché un uomo possa comprare a ragione le opportunità di Paul per venti ducati. La cifra che l'acquirente dovrebbe pagare per questa proposta differisce un po' dalla cifra che essa varrebbe per lui qualora egli ne fosse già in possesso. Comunque, seα(ricchezza di Paul) è grande, questa differenza è estremamente piccola e noi potremmo dunque considerare i due termini come uguali. Designando il prezzo di acquisto con x, il suo valore può determinarsi tramite l'equazione $\sqrt{\alpha+1-x} \cdot \sqrt[4]{\alpha+2-x} \cdot \sqrt[8]{\alpha+4-x} \cdot \sqrt[16]{\alpha+8-x} \cdot etc = \alpha$. Se α è un numero grande, una soluzione abbastanza soddisfacente sarà data da $x = \sqrt{\alpha+1} \cdot \sqrt[4]{\alpha+2} \cdot \sqrt[8]{\alpha+4} \cdot \sqrt[16]{\alpha+8} \cdot etc - \alpha$.

Dopo la lettura di questa tesi alla Società [l'Accademia Imperiale delle Scienze di San Pietroburgo] ne ho indirizzato una copia al sopramenzionato signor Nicolas Bernoulli al fine di conoscere la sua opinione sulla soluzione che io proponevo alla difficoltà che egli avava segnalato. In una lettera che mi scrisse nel 1732, egli mi indicava che non era affatto insoddisfatto della mia trattazione sul valore aspettato del guadagno nel caso di una persona che debba valutare le proprie opportunità. Egli pensava tuttavia che il caso è diverso quando si tratta

[44]Si riferisce al calcolo del valore atteso, che risulta infinito

[45]Karl Menger (nella nota 10 della traduzione di Sommer) fa notare che, essendo il numero di casi infinito, non si può parlare della metà o del quarto dei casi; la lettera N nel ragionamento di Bernoulli non ha in effetti senso

di un terzo che, più o meno nel ruolo di giudice, debba valutare le possibilità di uno dei partecipanti con equità e giustizia. Ho io stesso trattato questo problema in maniera simile nel § 2. In seguito, questo distinto accademico m'informò che l'illustre matematico Cramer aveva già esposto anni prima del mio studio una teoria sullo stesso tema. In effetti ho trovato la sua teoria talmente simile alla mia trattazione, che interpreto come un miracolo il fatto che noi avessimo indipendentemente realizzato una intesa così stretta su un argomento di tal sorta. Ritengo dunque utile citare i termini nei quali Cramer ha presentato la propria teoria in una lettera inviata a mio cugino nel 1728: eccoli qui[46]:

"Forse mi sono sbagliato, ma credo di aver risolto il particolare problema che avete sottoposto al Signor de Montmort con la vostra lettera del 9 settembre 1713 (problema 5, pagina 402). Per semplificare la questione, supporrei che A lancia una moneta in aria e che B si impegna a dare ad A uno scudo se la faccia con la croce esce al primo colpo, due se questo accade al secondo lancio, quattro se succede al terzo, otto al quarto e così via... Il paradosso consiste nel fatto che il calcolo fornisce una somma infinita come l'equivalente che A deve pagare a B, cosa che appare assurda poiché non esiste alcuna persona dotata di buon senso che accetterebbe di pagare venti scudi come equivalente. Ci si domanda la ragione di questa differenza tra il calcolo matematico e la valutazione popolare. Io credo che ciò venga dal fatto che (nella loro teoria), i matematici valutano il denaro proporzionalmente alla quantità, allorché (nella pratica), la gente di buon senso valuta il danaro proporzionalmente all'utilità che se ne può trarre. Quel che rende il valore aspettato infinito è l'enorme guadagno che si può ricavare nel caso in cui la croce non esce se non molto tardi, al centesimo o al millesimo lancio. Ora questa somma, se io ragiono da uomo di buon senso, non ha per me più valore, non mi suscita più piacere, non mi incita oltremodo ad accettare il gioco che non una somma di soli dieci o venti milioni di scudi. Supponiamo allora che ogni somma superiore a dieci milioni o, per semplificare, a $2^{24} = 166777216$ scudi sia vista uguale in valore a 2^{24} scudi o, meglio ancora, che io non possa mai guadagnare più di questa somma, per quanto tardi possa uscire croce, e la mia speranza sarà di $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + ... + \frac{1}{2^{25}} \cdot 2^{24} + \frac{1}{2^{26}} \cdot 2^{24} + \frac{1}{2^{27}} \cdot 2^{24} + etc. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + etc. = 12 + 1 = 13$.

Così, moralmente parlando[47], il valore aspettato si riduce a tredici scudi, e il mio equivalente alla stessa cifra, cosa che pare molto più ragionevole che renderlo infinito"

Fin qui[48] l'esposizione conserva un certo qual che di vago che la rende soggetta ad argomenti contrari. Se fosse vero che la quantità 2^{25} non ci sembrasse maggiore di 2^{24}, non bisognerebbe fare attenzione alla somma che potrebbe essere guadagnata dopo il 24mo lancio. In effetti, immediatamente prima di procedere al 25mo lancio, ho la certezza di non guadagnare meno di $2^{24} - 1$[49],

[46]Il passaggio seguente è in francese nel testo originale di Bernoulli

[47]È Cramer ad utilizzare per primo, in passi differenti di questa lettera, le espressioni *valore morale* e *speranza morale* al posto di utilità media, espressioni che anche Bernoulli utilizzerà talvolta in futuro

[48]A partire da qui il testo originale è di nuovo in latino

[49]Come fa anche notare Menger l'osservazione di Bernoulli non è chiara. In situazione di

cifra che, secondo la teoria, si può considerare come equivalente a 2^{24}. Si può dunque a pieno diritto affermare che il valore aspettato per il mio guadagno è di soli 12 ducati e non di 13[50]. Tuttavia, data la coincidenza tra il principio di base esposto dall'autore sopra citato e il mio, la trattazione precedente non ha evidentemente per scopo quello di privare questo principio di ogni valore[51]. Ritorno alla proposizione secondo la quale le persone ragionevoli dovrebbero valutare il denaro in ragione dell'utilità che esse ne traggono. Dichiaro ciò per evitare che la teoria nel suo insieme risulti errata. È esattamente ciò che dichiara l'eminente Cramer quando esprime, in ciò che segue, proprio ciò che sarebbe la nostra conclusione. Egli continua così[52]: *"L'equivalente può essere ancora più piccolo se noi facciamo qualche altra supposizione sul valore della ricchezza, dal momento che l'ipotesi appena fatta non è completamente valida, visto che sarà pur vero che 100 milioni procurano più soddisfazione di quanto non lo facciano dieci, ma non dieci volte di più. Per esempio, se si volesse supporre che il valore di certe ricchezze fosse direttamente proporzionale alla radice quadrata del loro ammontare, ovvero che la soddisfazione procurata da 40 milioni sia il doppio di quella procurata da 10 milioni, la mia speranza morale sarà* $\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{4} + \frac{1}{16}\sqrt{8} + ... = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$.

Eppure questa grandezza non è l'equivalente che cerchiamo, perché questo equivalente non deve essere uguale alla mia speranza morale, ma sarebbe piuttosto una grandezza tale che il dispiacere che mi causerebbe la sua perdita sia uguale al valore del piacere che io spero trarre dalla mia vincita. Di conseguenza, secondo la nostra ipotesi, l'equivalente deve elevarsi a $\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{6-4\sqrt{2}}\right) =$ 2.9...*quantità che è inferiore a 3, davvero una cifra modesta, ma che io credo tuttavia più vicina alla valutazione comune che non 13".*

gioco, una vincita di $2^{24} - 1$ ducati è impossibile

[50]Nella sua versione, Charreton dà un altro senso a questo passaggio, "Si può dunque dire che la mia speranza può valere tanto 12 che 13 scudi"

[51]Anche qui, la traduzione di Charreton è leggermente differente da quella della Sommer e di Mille. Per Charreton si deve intendere: "Non dico affatto ciò per attaccare il principio di base dell'autore, che è anche il mio, che gli uomini di buon senso devono valutare il denaro proporzionalmente all'uso che ne possono fare, ma piuttosto perché non si possa cogliere questo pretesto per sottostimare questa teoria. E difatti, l'illustre Cramer mette ancora in rilievo questo stesso principio nei seguenti termini, termini che rispondono perfettamente al nostro pensiero: ..."

[52]Il testo originale ulteriore è ancora in francese